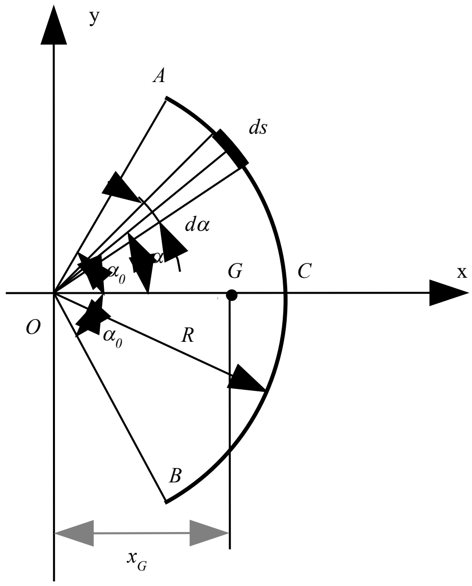
Ejercicio Nº 1 - Enunciado

Calcular la posición del baricentro G para los siguientes casos:

1. Arco de circunferencia de radio R y longitud $2\ \alpha_0 R$
2. Triángulo escaleno de altura h y base b
3. Sector circular y semicírculo

Ejercicio Nº 1 - Resolución

1. Cálculo de la posición del baricentro para un arco de circunferencia



Teniendo en cuenta que la posición del baricentro está dada por:

$$x_G = \frac{\int_s x \cdot ds}{\int_s ds}$$

Siendo

$$ds = R \cdot d\alpha$$

Se tiene que

$$s = \int_s ds = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} R \cdot d\alpha = 2 \cdot R \cdot \alpha_0$$

$$x = R \cdot \cos(\alpha)$$

Luego,

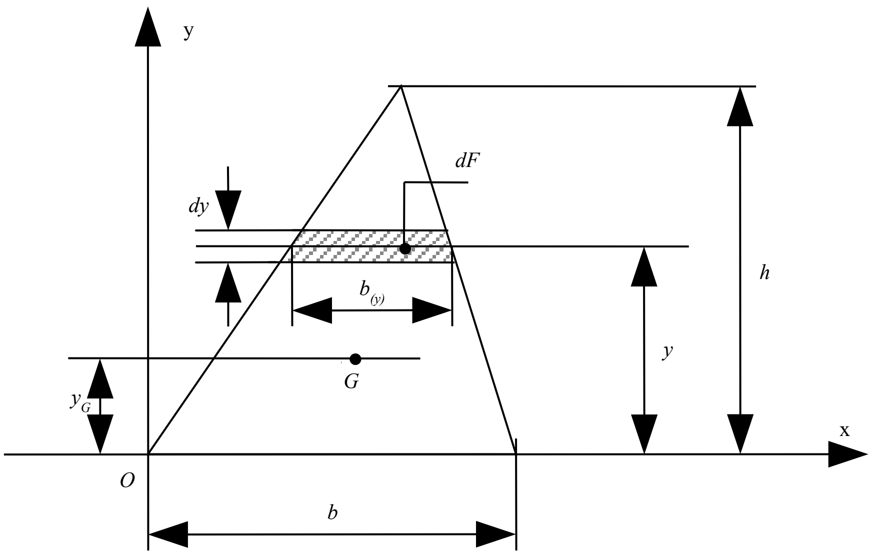
$$\int_s x \cdot ds = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} x \cdot R \cdot d\alpha = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} R^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha = 2 \cdot R^2 \cdot \int_0^{\alpha_0} \cos(\alpha) \cdot d\alpha = 2 \cdot R^2 \cdot \sin(\alpha)\Big|_0^{\alpha_0} = 2 \cdot R^2 \cdot \sin(\alpha_0)$$

Finalmente, reemplazando:

$$x_G = \frac{\int_s x \cdot ds}{\int_s ds} = \frac{2 \cdot R^2 \cdot \sin(\alpha_0)}{2 \cdot R \cdot \alpha_0}$$

$$\boldsymbol{x_G = \frac{R \cdot \sin(\alpha_0)}{\alpha_0}}$$

2. Cálculo de la posición del baricentro para un triángulo escaleno



$$y_G = \frac{\iint_F y \cdot dF}{\iint_F dF}$$

$$dF = b_{(y)} \cdot dy$$

$$F = \iint_F dF = \frac{b \cdot h}{2}$$

por semejanza de triángulos:

$$\frac{b}{h} = \frac{b_{(y)}}{(h-y)}$$

$$b_{(y)} = \frac{b}{h} \cdot (h-y)$$

Luego,

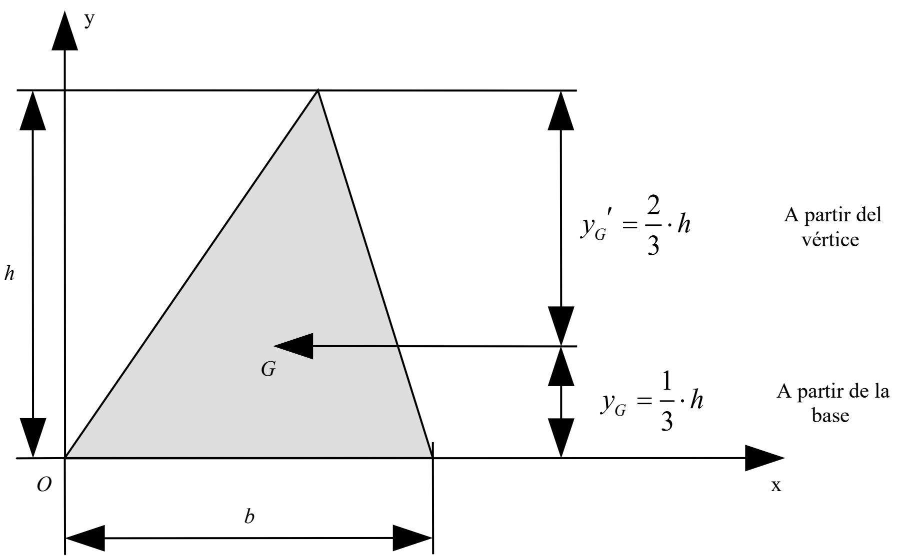
$$\iint_F y \cdot dF = \int_0^h y \cdot b_{(y)} \cdot dy = \int_0^h y \cdot \frac{b}{h} \cdot (h-y) \cdot dy = b \cdot \int_0^h y \cdot dy - \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy = \frac{b \cdot h^2}{2} - \frac{b \cdot h^3}{3 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Reemplazando:

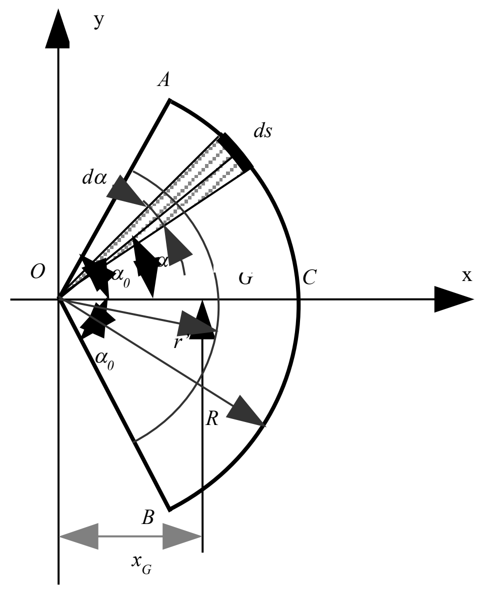
$$y_G = \frac{\iint_F y \cdot dF}{\iint_F dF} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{6}}{\frac{b \cdot h}{2}}$$

$$\boldsymbol{y_G = \frac{h}{3}}$$

En consecuencia a partir del vértice se tendrá:



3. Cálculo de la posición del baricentro para la superficie de un sector circular



Se considera una superficie elemental de arco *ds* y altura *R*. El baricentro de dicha figura, un triángulo elemental, se encuentra a una distancia $r' = \frac{2}{3} R$, respecto del centro *O*.

Extendiendo esto para los infinitos triángulos elementales, el lugar geométrico de sus baricentros será un arco de circunferencia de radio r'.

En consecuencia el área de la superficie del sector circular, se encuentra concentrada a lo largo del mencionado arco baricéntrico de los triángulos elementales.

Por consiguiente, hallando el baricentro del arco de circunferencia de radio r', se tiene el baricentro de dicho sector circular

$$x_G = \frac{r' \cdot \sin(\alpha_0)}{\alpha_0} = \frac{\left(\frac{2}{3} R\right) \cdot \sin(\alpha_0)}{\alpha_0}$$

$$\boldsymbol{x_G = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin(\alpha_0)}{\alpha_0}}$$

En el caso particular de un semicírculo, se tendrá que

$$2 \cdot \alpha_0 = \pi \qquad \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \sin(\alpha_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

y, consecuentemente,

$$x_G = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin(\alpha_0)}{\alpha_0} = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_G = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}}$$